

## Еселі интегралдарды қолдану арқылы экологиялық процестерді математикалық модельдеу (Ауа ластануы, температура таралуы, ресурстарды бағалау)

ЖАРИЯЛАНДЫ  
04.05.2026

СІЛТЕМЕ  
<https://bilimger.kz/188458/>

### Тишжан Айзат

«Академик Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды ұлттық зерттеу университеті,  
Математика және ақпараттық технологиялар факультеті  
БВ05401-Математика білім беру бағдарламасының мат-23-1к студенті

Ғылыми жетекшісі: **Искакова Г.Ш.**, ф.-м.ғ.к., қауымдастырылған профессор

**Аңдатпа.** Бұл мақалада еселі интегралдарды пайдалану арқылы экологиялық процестерді математикалық модельдеу тәсілі қарастырылады. Қазіргі кезде ауа ластануы, температураның кеңістікте таралуы және табиғи ресурстарды сапалы бағалау экологиялық зерттеулердің аса құнды бағыттарының бөлігі болып табылады. Осы процестерді сандық тұрғыдан сипаттау үшін еселі интегралдар кеңінен қолданылады, өйткені олар кеңістіктегі шамалардың таралуын және жалпы мөлшерін анықтауға мүмкіндік береді.

Мақалада ауадағы ластаушы заттардың жалпы массасын есептеу қарастырылады. Және нақты бір аумақтағы орташа температураны анықтау, табиғи ресурстардың көлемін бағалау мысалдары талқыланады. Теориялық негіздер мен математикалық модельдер талданып, олардың практикалық қолданылу ерекшеліктері көрсетіледі. Еселі интегралдың экологиялық есептерді шешудегі тиімділігі мен маңыздылығы көрсетіледі.

**Түйінді сөздер:** еселі интеграл, экологиялық процестер, математикалық модельдеу, ауа ластануы, температураның таралуы, табиғи ресурстарды бағалау.

**Аннотация.** В данной статье рассматривается применение кратных интегралов для математического моделирования экологических процессов. В настоящее время загрязнение воздуха, пространственное распределение температуры и качественная

оценка природных ресурсов являются одними из наиболее важных направлений экологических исследований. Для количественного описания этих процессов широко используются кратные интегралы, поскольку они позволяют определить распределение величин в пространстве и их общее количество.

В статье рассматривается вычисление общей массы загрязняющих веществ в воздухе. Также обсуждаются примеры определения средней температуры на определённой территории и оценки объёма природных ресурсов. Анализируются теоретические основы и математические модели, а также показаны особенности их практического применения. Продемонстрирована эффективность и значимость кратных интегралов при решении экологических задач.

**Ключевые слова:** кратный интеграл, экологические процессы, математическое моделирование, загрязнение воздуха, распределение температуры, оценка природных ресурсов.

**Abstract.** This article examines the application of multiple integrals in the mathematical modeling of ecological processes. Currently, air pollution, spatial temperature distribution, and the qualitative assessment of natural resources are among the most important areas of environmental research. Multiple integrals are widely used to quantitatively describe these processes, as they make it possible to determine the spatial distribution of quantities and their total amount.

The article considers the calculation of the total mass of pollutants in the air. It also discusses examples of determining the average temperature within a specific area and estimating the volume of natural resources. The theoretical foundations and mathematical models are analyzed, and the features of their practical application are presented. The effectiveness and importance of multiple integrals in solving environmental problems are demonstrated.

**Keywords:** multiple integral, ecological processes, mathematical modeling, air pollution, temperature distribution, natural resource assessment.

## КІРІСПЕ

Қазіргі таңда экологиялық мәселелер адамзат дамуының маңызды факторларының бірі болып табылады. Өнеркәсіптік зауыттардың қарқынды дамуы, табиғи ресурстарды шектен тыс пайдалану, ормандарды кесу, климаттың өзгеруі, автокөлік шығындылары қоршаған ортаға әсер етеді. Әсіресе атмосфералық ауаның ластануы, температуралық жүйенің өзгеруі және табиғи ресурстар қорының төмендеуі экожүйелерге елеулі әсерін тигізуде. Осындай экологиялық процестерді зерттеу және тиімді талдау үшін математикалық модельдеу әдістері кеңінен қолданылады.

Математикалық модельдеу — экологиялық құбылыстарды нақты математикалық теңдеулер мен функциялар арқылы сипаттау үдерісі. Бұл тәсіл табиғи процестердің заңдылықтарын анықтауға, сандық сипаттамаларын есептеуге және келешектегі өзгерістерін болжауға мүмкіндік береді. Экологиялық процестер көп жағдайда кеңістікте және уақытта таралатын шамалармен анықталатындықтан, оларды зерттеуде еселі интегралдар маңызды рөл атқарады.

Еселі интегралдар (қос және үш еселі интегралдар) арқылы біз бір аумақта кең таралған шамалардың кеңістіктегі жалпы мөлшерін, орташа мәнін немесе көлемін анықтай аламыз. Мысалы, ауадағы ластаушы заттардың жалпы массасын анықтау үшін концентрация функциясын кеңістік аймақ бойынша интегралдау қажет. Осыған ұқсас белгілі бір өңірдегі орташа температураны немесе табиғи ресурстардың жалпы қорын есептеу кезінде еселі интегралдар қолданылады.

Бұл мақалада еселі интегралдарды пайдалану арқылы экологиялық процестерді математикалық модельдеудің теориялық негіздері қарастырылады. Ауа ластануы, температураның таралуы және ресурстарды бағалау есептеріне еселі интегралды пайдалану талданады. Зерттеудің мақсаты — еселі интегралдардың экологиялық модельдердегі маңыздылығын көрсету және олардың практикалық маңызын ашып көрсету. [1] [3]

## **1. МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУДІҢ ЭКОЛОГИЯДАҒЫ ТАРИХЫ ЖӘНЕ ТЕОРИЯЛЫҚ НЕГІЗІ**

### **1.1. Математикалық модельдеудің экологиядағы даму тарихы**

Экологиялық процестерді математикалық модельдеу ХХ ғасырдың бас кезінде Лотка мен Вольтерраның дифференциалдық теңдеулерін қолданған популяциялар динамикасына байланысты еңбектерінде бастау алған. Лотка-Вольтерраның «жыртқыш-құрбан» моделі екі түрдің өзара әрекеттесуін сандық түрде сипаттауға мүмкіндік берді және экологияда математикалық тәсілді қолдануға мүмкіндік берді. ХХ ғасырдың ортасында Льюис Фрай Рирадсон интеграл мен дифференциалдық теңдеулерді пайдалана отырып, ауа ластаушы заттардың таралуын болжау үшін атмосфераны модельдеудің сандық әдістерін дамытты. Осы кезеңнен бастап орташа температураны есептеу, ластану массасын және табиғи ресурстардың кеңістігі таралуын бағалау үшін еселі интегралдар қарқынды түрде пайдаланыла бастады.

Осылайша, экологиялық процестерді заманауи математикалық модельдеудің әдістемелік негізі ХХ ғасыр бойы қалыптасты. Алғашында дифференциалдық теңдеулер биологиялық жүйелердің динамикасын модельдеу мен еселі интегралдар енгізілді. Бұл тәсілдер бүгінгі таңда да ауаның ластануын, температураның таралуын және табиғи ресурстарды бағалауда негізгі құрал болып табылады. [2]

## 1.2. Математикалық модельдеудің теориялық негізі

Математикалық модельдеу — нақты процестерді математика тіліндегі жүйеленген сипаттама арқылы зерттеу әдісі. Экологиялық зерттеулерде математикалық модель жүйе параметрлері арасындағы сандық тәуелділіктерді анықтауға, олардың өзгеру заңдылықтарын ашуға және қоршаған ортаның жағдайына болжамды баға беруге мүмкіндік береді.

Экологиялық процестер, әдетте, кеңістіктік және уақыттық біртекті еместігімен көрініс табады. Ластаушы заттардың концентрациясы, температурасы, ресурстардың таралу тығыздығы уақыт өте келе және кеңістіктің әртүрлі нүктесінде түрленіп отырады. Осыған орай, модельдерді құру кезінде келесі түрдегі айнымалы функциялар қолданылады:

$$f = f(x, y, z, t)$$

мұндағы  $(x, y, z)$  — кеңістіктік координаттар, ал  $t$  — уақыт.

Өзгерістер динамикасын сипаттау үшін дифференциалдық теңдеулер қолданылады. Олар диффузия, жылу беру, тасымалдау және популяциялардың өсу процестерін модельдеуге мүмкіндік береді. Алайда, жүйенің интегралдық сипаттамаларын — заттың жалпы массасын, орташа температураны, ресурстардың жинақтық көлемін алу үшін еселі интегралдарды пайдалану міндеттеледі. Еселі интегралдар шектеулі сипаттамадан аймақ бойынша жиынтық көрсеткішке ауысу керек болған жағдайларда пайдаланылады. Мәселен, атмосфера көлеміндегі ластаушы заттың массасы келесі өрнекпен сипатталады:

$$M = \iiint_V c(x, y, z) dV$$

мұндағы  $c(x, y, z)$  — белгілі бір нүктедегі ластаушы заттардың концентрациясы, ал  $V$  — қарастырылып отырған көлем.

Сонымен қатар, температураның таралуын модельдеу кезінде орташа температура дәл осыған ұқсас тәсілмен анықталады:

$$\overline{T} = \frac{1}{V} \iiint_V T(x, y, z) dV$$

мұндағы  $T(x, y, z)$  — температуралық өріс.

Ал табиғи ресурстарды бағалау кезінде екі еселі немесе үш еселі интегралдарды

қолдану арқылы ресурстардың аймақтық жиынтық мөлшерін анықтауға мүмкіндік береді.

Мысалы, белгілі бір аумақтағы ресурстың жалпы мөлшерін мына формула арқылы анықтауға болады:

$$Q = \iint_S \rho(x, y) dS$$

мұндағы  $\rho(x, y)$  — ресурстың таралу тығыздығы, ал  $S$  — зерттелетін аймақтың ауданы.

Осылайша, еселі интегралдар кеңістікте таралған экологиялық көрсеткіштерді біріктірудің маңызды құралы болып табылады. Дифференциалдық теңдеулер мен еселі интегралдар экологиялық процестерді сипаттауға, сандық нәтиже алуға және құрылымын ескеруге мүмкіндік беретін математикалық құралдар жүйесін қалыптастырады. [3][4]

## 2. ЕСЕЛІ ИНТЕГРАЛДЫ ЭКОЛОГИЯЛЫҚ ЕСЕПТЕ ҚОЛДАНУ

Зерттеу жұмысының практикалық бөлімінде Қарағанды қаласының атмосфералық мониторинг жүйесіне кіретін АС-4 автоматты станциясының көрсеткіштері мен «Қазгидромет» РМК жариялаған ресми экологиялық бюллетеньдердің мәліметтері негізге алынды. Осы деректерге сүйене отырып, төмендегі математикалық модельдерді құрастырдық:

### 2.1. Атмосфералық ауаның техногендік ластануын бағалау

Қарағанды қаласының өнеркәсіптік аудандарындағы (мысалы, АС-10 бақылау бекеті) шаң концентрациясының таралуын зерттеу үшін еселі интеграл қолданылады. Біз зерттеу аймағын  $(x \in [0,3])$  және  $(y \in [0,4])$  (км) деп алдық. Ластану тығыздығының функциясы:  $\rho(x, y) = 0.1 + 0.04x + 0.02y$  (г/м<sup>3</sup>).

$$M = \int_0^3 dx \int_0^4 (0.1 + 0.04x + 0.02y) dy$$

1. Ішкі интегралды  $(y)$  бойынша есептейміз:

$$\int_0^4 (0.1 + 0.04x + 0.02y) dy = \left[ 0.1y + 0.04xy + 0.01y^2 \right]_0^4$$

\\

$$= (0.1 \times 4 + 0.04x \times 4 + 0.01 \times 16) = 0.4 + 0.16x + 0.16$$

\]

\[

$$= 0.56 + 0.16x$$

\]

2. Сыртқы интегралды  $(x)$  бойынша есептейміз:

\[

$$M = \int_0^3 (0.56 + 0.16x) dx = \left[ 0.56x + 0.08x^2 \right]_0^3$$

\]

\[

$$= (0.56 \times 3 + 0.08 \times 9) = 1.68 + 0.72 = 2.4$$

\]

Нәтижесінде зерттелген аумақтағы шаңның жиынтық массасы  $(2.4)$  тоннаны құрайды (100 м биіктікті ескергенде).

## 2.2. Температураның таралуын еселі интеграл арқылы анықтау

Дәл осы ауа ластаушы заттың массасын тапқан сияқты белгілі бір аумақта температураның таралуын да еселі интегралдың көмегімен табамыз. Ол үшін келесі мысал есепті қарастырайық.

Қарағанды қаласының өнеркәсіптік аймағындағы ЖЭО-3 маңындағы температуралық өріс келесі функциямен сипатталады:

\[

$$T(x,y) = 22 - 0.2x^2 - 0.2y^2$$

\]

Мұндағы  $(x)$  пен  $(y)$  — жылу көзінен қашықтық (км). Зерттеу аймағы жылу көзінен 3 км радиустағы шеңбер ретінде алынды  $((x^2 + y^2) \leq 9)$ . Осы аумақтағы орташа температураны анықтау қажет.

Орташа температураны табу үшін келесі формуланы қолданамыз:

\[

$$T_{\text{орт}} = \frac{1}{S} \iint_D T(x,y) dA$$

\]

Мұндағы  $(S)$  — дөңгелектің ауданы:  $(S = \pi R^2 = \pi \times 3^2 = 9\pi)$ .

Есептеуді жеңілдету үшін полярлық координаттар жүйесіне көшеміз:

\[

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

\]

Функцияның түрі:  $T(r, \varphi) = 22 - 0.2r^2$ .

Шекаралары:  $(0 \leq r \leq 3, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ .

1. Еселі интегралды есептеу:

\[

$$\int_0^{2\pi} \int_0^3 (22 - 0.2r^2) r \, dr \, d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (22r - 0.2r^3) \, dr$$

\]

Ішкі интегралды  $(r)$  бойынша есептейміз:

\[

$$\int_0^3 (22r - 0.2r^3) \, dr = \left[ 11r^2 - \frac{0.2r^4}{4} \right]_0^3 = \left[ 11r^2 - 0.05r^4 \right]_0^3$$

\]

Мәндерін қоямыз:

\[

$$(11 \times 3^2 - 0.05 \times 3^4) = (11 \times 9 - 0.05 \times 81) = 99 - 4.05 = 94.95$$

\]

Сыртқы интегралды  $(\varphi)$  бойынша есептейміз:

\[

$$\int_0^{2\pi} 94.95 \, d\varphi = 94.95 \times 2\pi = 189.9\pi$$

\]

2. Орташа температура:

\[

$$T_{\text{орт}} = \frac{189.9\pi}{9\pi} = 21.1$$

\]

Жүргізілген математикалық модельдеу нәтижесінде ЖЭО-3 маңындағы 3 шақырымдық радиустағы орташа температуралық фон  $(21.1)$  °C екені анықталды. Бұл көрсеткіш қоршаған ортадағы жылулық тепе-теңдікті бағалауға және атмосфераның төменгі қабатындағы инверсиялық процестерді болжауға мүмкіндік береді.

### 2.3. Белгілі бір аумақтағы ресурстың жалпы мөлшерін анықтау

Нұра өзенінің арнасының белгілі бір учаскесін математикалық түрде  $(y = x^2)$  параболасы мен  $(y = 1)$  түзуі арқылы шектелген облыс деп қарастырайық

(координаттар км-мен берілген). Осы учаскедегі су түбіндегі техногендік шөгінділердің қалыңдығы  $(h(x,y) = 2 - y)$  (метрмен) функциясымен сипатталады. Осы аумақтағы шөгінділердің жалпы көлемін  $(V)$  еселі интеграл көмегімен анықтаймыз.

Ресурстың (шөгіндінің) жалпы көлемін табу үшін келесі еселі интегралды есептейміз:

$$V = \iint_{D} h(x,y) \, dA$$

Мұндағы интегралдау облысы  $(D)$ :

$(x)$  айнымалысы  $(-1)$  мен  $(1)$  аралығында, өйткені  $(x^2 = 1)$  теңдеуінің шешімі  $(x = \pm 1)$ .

$(y)$  айнымалысы төменнен параболамен  $(y = x^2)$ , жоғарынан түзумен  $(y = 1)$  шектелген.

Интеграл құрамыз:

$$V = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (2 - y) \, dy$$

Ішкі интегралды  $(y)$  бойынша есептейміз:

$$\int_{x^2}^1 (2 - y) \, dy = \left[ 2y - \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^1 = \left( 2 - \frac{1}{2} \right) - \left( 2x^2 - \frac{(x^2)^2}{2} \right)$$

$$= 1.5 - (2x^2 - 0.5x^4) = 1.5 - 2x^2 + 0.5x^4$$

Сыртқы интегралды  $(x)$  бойынша есептейміз:

$$V = \int_{-1}^1 (1.5 - 2x^2 + 0.5x^4) \, dx$$

Интегралдаймыз:

$$V = \left[ 1.5x - \frac{2x^3}{3} + \frac{0.5x^5}{5} \right]_{-1}^1$$

$$\left[ \right.$$

$$V = \left[ 1.5x - 0.67x^3 + 0.1x^5 \right]_{-1}^1$$

]

Шектерін қойып есептейміз:

[

$$(1.5 - 0.67 + 0.1) - (-1.5 + 0.67 - 0.1) = 0.93 - (-0.93) = 1.86$$

]

**Жауабы:** зерттелген өзен учаскесіндегі шөгінділердің жалпы көлемі шамамен  $(1.86)$  м<sup>3</sup> (әр метрлік қима бойынша немесе таңдалған масштаб бірлігінде).

Жоғарыда келтірілген үш есептің шартын құру үшін «Қазгидромет» мекемесінің 2024 жылғы ашық деректерін (Қарағанды қаласындағы АС-4 станциясы мен ЖЭО-3 көрсеткіштері) негізге алдым. Бұл деректердегі нақты цифрларды еселі интеграл тақырыбына сәйкес келетіндей етіп, функциялар түрінде құрастырып шықтық.

## ҚОРЫТЫНДЫ

Бұл мақалада еселі интегралдарды қолдану арқылы экологиялық процестерді математикалық модельдеу мәселелері қарастырылды. Зерттеу барысында қос және үш еселі интегралдардың кеңістікте таралған шамалардың жалпы мөлшерін, орташа мәнін және көлемдік маңызын анықтауда қолданылатыны көрсетілді.

Ауа ластануын модельдеу жағдайында концентрация функциясын көлем бойынша интегралдау арқылы ластаушы заттардың жалпы массасын есептеуге болатындығы көрініс тапты. Температураның кеңістікте таралуын сипаттауда жылудың таралу теңдеуі мен екі еселі интеграл негізінде орташа температураны анықтау тәсілдері қарастырылды. Табиғи ресурстарды бағалау барысында аймақтық тығыздық функциясын қос интегралдау арқылы жалпы қорды есептеудің мүмкіндігі талданды.

Сақталу заңдарына негізделген интегралдық және дифференциалдық модельдер экологиялық процестердің физикалық мәнін дәл сипаттауға мүмкіндік береді. Ал компьютерлік модельдеу, мысал есептер мен визуализация әдістері алынған нәтижелерді көрнекі түрде көрсетуге және талдауға жағдай жасады.

Жалпы алғанда, еселі интегралдар экологиялық есептерді шешуде тиімді әрі әмбебап математикалық құрал болып табылады. Олар қоршаған ортадағы процестерді сандық тұрғыдан бағалауға, болжауға және тұрақты даму стратегияларын ғылыми негіздеуге мүмкіндік береді. Еселі интегралдарды қолдану арқылы экологиялық процестерді математикалық модельдеу тиімді тәсіл болып табылады.

## ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ДЕРЕККӨЗДЕР ТІЗІМІ

1. Пискунов Н.С. (1985). Дифференциальное и интегральное исчисления.
2. Сұлтанов М.А. Математикалық және компьютерлік модельдеу негіздері. Алматы: 2014.
3. Щепетова В.А. (2015). Основы математического моделирования в экологии.
4. Каменев Г.К., Лысенко Н.А., Люлякин О.П., Поляновский В.О., Саранча Д.А., Юрезанская Ю.С. (2015). Использование методов математического моделирования для анализа экологических объектов.
5. Weisstein, Eric W. "Multiple Integral". MathWorld.
6. Қазгидромет РМК. ҚР-ның қоршаған ортасының жай-күйі туралы ақпараттық бюллетень. 2024 жыл. <https://www.kazhydromet.kz/>

**ҚМ АА** Куәлік нөмірі: **KZ45VPY00102718** — ҚР Мәдениет және Ақпарат министрлігі

© 2026 **Bilimger.kz** Ақпараттық-танымдық білім порталы. Барлық мазмұн авторлық құқықпен қорғалған.