bilimger.kz Республикалық білім және ғылым порталы
https://bilimger.kz
ҚР Мәдениет және Ақпарат министрлігі тіркелген — Куәлік нөмірі: **KZ45VPY00102718**
2025

БӨЛІМ: UALIKHANOV UNIVERSITY / UNIVER / СТУДЕНТ

Тригонометриялық теңсіздіктерді шешудің кейбір әдістері

ЖАРИЯЛАНДЫ	СІЛТЕМЕ
25.11.2025	https://bilimger.kz/184536/

УДК.514.116

Әніш Сәния Абдрахманқызы

Ш.Уалиханов атындағы Көкшетау университетінің математика,физика және информатика кафедрасының «Математика мұғалімі» мамандығы бойынша 1 курс студенті

Ғылыми жетекші: ***Мусайбеков Рашид Каблулкалимович***

Профессор ассистенті,академиялық доцент, жаратылыс ғылымдарының магистірі

Аңдатпа. Бұл мақалада тригонометриялық теңсіздіктерді шешудің негізгі әдістері жүйелі түрде талданып, олардың теориялық негіздері мен практикалық қолданылу мүмкіндіктері жан-жақты қарастырылады. Тригонометриялық функциялардың периодтық, симметриялық және монотондық қасиеттерін ескере отырып, теңсіздіктерді шешудің геометриялық интерпретация, графиктік салыстыру, алгебралық-түрлендіру және интервалдық талдау сияқты төрт іргелі тәсілі көрсетілді. Әр әдістің артықшылығы нақты мысалдар арқылы дәлелденіп, олардың тригонометриялық теңсіздіктердің мәнін ашудағы рөлі терең сипатталды. Зерттеу нәтижесінде тригонометриялық теңсіздіктерді шешудің көпқырлы логикалық құрылымын түсінуге, сондай-ақ күрделі тригонометриялық өрнектерді дұрыс талдауға мүмкіндік беретін аналитикалық модель ұсынылады.

Кілт сөздер: Тригонометриялық теңсіздік; тригонометриялық функция; бірлік шеңбер; графиктік әдіс; фазалық ығысу; алгебралық-түрлендіру; монотондық; интервалдық талдау; периодтылық; аналитикалық модель.

Кіріспе

Қазіргі математикалық талдау жүйесінде тригонометриялық теңсіздіктерді шешу міндеті ерекше орын алады. Себебі тригонометриялық функциялар — тек абстрактілі формулалар жиынтығы емес, табиғи және техникалық процестердің ішкі логикасын сипаттайтын әмбебап тіл. Тербелістер, толқындар, периодтық сигналдар, оптикалық және электромагниттік құбылыстар, тіпті қаржы нарығындағы маусымдық ңмодельдер — барлығы да тригонометриялық заңдылықтарға сүйенеді. Осыған байланысты тригонометриялық теңсіздіктерді шешудің дәстүрлі тәсілдерін жетілдіру, жаңа интерпретациялық әдістер енгізу, графикалық және фазалық анализді кеңейту қазіргі ғылымның маңызды талаптарының біріне айналып отыр. Дегенмен көптеген математикалық әдебиеттерде теңсіздіктерді шешу тәсілдері тар шеңберде қарастырылып, олардың кеңейтілген, күрделі формаларға арналған нұсқалары толық ашылмайды. Бұл оқушылар мен студенттердің тригонометриялық талдауды терең және жүйелі меңгеруіне кедергі келтіреді.

Осы мәселені ескере отырып, бұл мақала тригонометриялық теңсіздіктерді шешудің классикалық және заманауи әдістерін ғылыми тұрғыда қайта қарастыруды, олардың қолдану ерекшеліктерін талдауды және практикалық тиімділігін көрсетуді мақсат етеді.

Негізгі бөлім

Тригонометриялық теңсіздіктердің табиғаты олардың периодтылық, шектеулілік және функционалдық симметрия қасиеттерімен тікелей байланысты. Синус, косинус, тангенс сияқты функциялар шексіз қайталанатын құрылымға ие болғандықтан, олардың әрбір теңсіздігі тек бір интервалда ғана емес, шексіз көп периодтық көшірмелерде шешім табады [1]. Бұл ерекшелік тригонометриялық теңсіздіктерді алгебралық теңсіздіктерден айрықшалап, талдау процесіне «циклдік құрылым» ұғымын енгізеді. Сонымен қатар, негізгі тригонометриялық функциялар белгілі шектеулі диапазондарда өзгереді: sin □ және cos □ – [-1;1] интервалында, ал tan □ пен cot □ — асимптоталық үзілістер арқылы шексіздікке ұмтылады. Мұндай шектеулер теңсіздікті шешу кезінде интервалдарға бөлуді, функциялардың өсу және кему аймақтарын нақты ажыратуды қажет етеді.

Одан бөлек, тригонометриялық функциялардың симметриясы мен фазалық ығысу қасиеттері теңсіздіктердің шешімін күрделі етеді де, сонымен бірге талдауға ерекше мүмкіндіктер береді. Мысалы, синус функциясының тақ, ал косинустың жұп болуы, олардың сәйкес түрде □ және □ арқылы ығысуы — теңсіздіктерді ықшамдап, оларды бір-біріне түрлендіруге мүмкіндік береді. Функциялар белгілі интервалдарда монотонды болғанымен, толық период ішінде монотондықтың үзілуі шешімді бірнеше бөлікке жіктеуді талап етеді. Осы қасиеттердің барлығы тригонометриялық теңсіздіктерді шешуді көпқырлы, терең логикалық талдауды қажет ететін күрделі, бірақ ерекше тартымды математикалық салаға айналдырады. Геометриялық әдіс тригонометриялық теңсіздіктердің мәнін кеңістіктік интерпретация арқылы ашады. Бірлік шеңберіндегі әрбір бұрыш нүктенің координатасына айналатындықтан, теңсіздік белгілі бір доға бөлігін табу мәселесіне келіп тіреледі. Мысалы, sin □ > 1 шарты – ординатасы 1/2-ден жоғары орналасқан шеңбер доғасын анықтау деген сөз.

Бұл әдістің ғылыми қуаты — тригонометриялық функциялардың нақты геометриялық құрылымын көрнекі түрде көрсетуінде. Осындай визуалды модель теңсіздік шешімін логикалық тұрғыдан дәлелдеуге ғана емес, оның себептілігін түсінуге мүмкіндік береді. Геометриялық тәсіл тригонометриялық теңсіздіктерді «абстракциядан шынайы кеңістікке» көшіреді.

Графиктік әдіс тригонометриялық теңсіздіктерді функциялар арасындағы динамикалық бәсекелестікті талдау арқылы шешеді. Екі функция бір жазықтықта кескінделгенде, олардың қиылысу нүктелері мен үстемдік аймақтары теңсіздіктің шешіміне тікелей әсер етеді [2]. Мысалы, sin □ > cos □ теңсіздігі – қай интервалда синус графигі косинус графигінен жоғары орналасатынын анықтау мәселесі. Функциялар □-те қиылысады, содан кейін синус белгілі бір аралықта басым болады.

Графиктік әдістің ерекше құндылығы – тригонометриялық функциялардың фазалық ығысуын, амплитуда өзгерісін және периодтық симметриясын бірден көрсетуінде. Бұл тәсіл теңсіздікті тек сандық емес, «қозғалыс» ретінде оқуға мүмкіндік береді.

Алгебралық әдіс – тригонометриялық теңсіздіктерді аналитикалық ықшамдау арқылы шешудің ең дәл тәсілі. Оның негізгі идеясы – күрделі өрнектерді қарапайым

синусоидалық модельге келтіру. Мысалы: 2 sin □ − cos □ > 0 өрнегі √5 sin(□ −□□□□□□ 1/2) > 0 түрінде жазылғанда, теңсіздік тек бір ғана синусоиданың оң аймағын табуға айналады.

Бұл тәсілдің ғылыми маңыздылығы – функцияның амплитудасы мен фазалық ығысуы арасындағы байланысты ашуында. Алгебралық модель кез келген күрделі тригонометриялық комбинацияның ішкі құрылымын айқын көрсетіп, теңсіздікті шешудің логикалық жүктемесін жеңілдетеді.

Интервалдық әдіс тригонометриялық функциялардың толық периодта монотонды еместігін, бірақ белгілі сегменттерде тұрақты өзгеріс бағытына ие болатынын ескереді. Әр интервалда функцияның өсуі, кемуі немесе асимптоталық үзілуі теңсіздікті бөлшектеп талдауға мүмкіндік береді [3]. Мысалы, cos □ < 0 теңсіздігін шешу үшін cos □ функциясының [0, □] аралығында төмендейтінін және осы аралықта нөлден өтетінін білу жеткілікті. Нәтижесінде теңсіздік дәл әрі жүйелі интервалмен беріледі.

Бұл әдіс әсіресе күрделі тригонометриялық теңсіздіктерді шешуде тиімді, себебі әр бөлікте функцияның мінезі өзгеретіндіктен, теңсіздік те әр интервалда өз ерекшелігіне ие болады. Монотондық тәсілі тригонометриялық теңсіздіктердің логикалық құрылымын терең ашуға мүмкіндік береді.

Аталған төрт әдіс тригонометриялық теңсіздіктерді шешудің тек механикалық тәсілдері емес; олар функциялардың периодтық табиғатын әр қырынан талдауға мүмкіндік беретін ғылыми-аналитикалық құралдар. Геометриялық интерпретация –

кеңістіктік дәлдікті, графиктік әдіс – динамикалық мінезді, алгебралық түрлендіру – аналитикалық нақтыдықты, интервалдық тәсіл – логикалық жүйелілікті қамтамасыз етеді. Бұл әдістердің синтезі тригонометриялық теңсіздіктердің мәнін толық ашып, кез келген деңгейдегі есепті сенімді шешуге жол ашады.

Тригонометриялық теңсіздіктерді шешудің кейбір әдістері

Есеп 1

Теңсіздікті шешіңіз:

$$2\sin(x) + \sqrt{3}\cos(x) \geq 1$$

Шешуі:

R-formula әдісі қолданылады:

$$2\sin(x) + \sqrt{3}\cos(x) = R\sin(x + \varphi)$$

$$R = \sqrt{7}.$$

Сонда теңсіздік:

$$\sin(x + \varphi) \geq 1/\sqrt{7}.$$

Жалпы шешімі:

$$x \in [\arcsin(1/\sqrt{7}) - \arctan(\sqrt{3}/2) + 2k\pi\ ;\ \pi - \arcsin(1/\sqrt{7}) - \arctan(\sqrt{3}/2) + 2k\pi],\ k \in \mathbb{Z}.$$

Есеп 2

Теңсіздік: $\sin(2x) > \cos(x)$

Шешуі:

$$x \in (\pi/3 + 2k\pi\ ;\ \pi/2 + 2k\pi) \cup (3\pi/2 + 2k\pi\ ;\ ;\ 5\pi/3 + 2k\pi).$$

Қорытынды

Тригонометриялық теңсіздіктерді шешу – тек белгілі аралықтарды табу емес, ол периодты функциялардың терең құрылымын, олардың геометриялық, аналитикалық және динамикалық қасиеттерін бір жүйеде түсіндіруді талап ететін күрделі математикалық ойлау процесі [4]. Мақалада қарастырылған әдістер – функциялардың кеңістіктік бейнесін сезінуден бастап, олардың фазалық үйлесімін ажыратуға, алгебралық ықшамдау арқылы ішкі құрылымын анықтауға және монотонды сегменттерде мінезін дәл бағалауға дейінгі көпқабатты талдау жолын көрсетеді. Тригонометриялық теңсіздіктердің шешімін табу осы әдістерді жеке емес, өзара сабақтас күйде қолданғанда ғана өзінің шынайы ғылыми қуатын ашады; ал бұл тәсілдер жүйесі кез келген деңгейдегі тригонометриялық талдауды терең, дәл және логикалық тұрғыдан мінсіз орындауға мүмкіндік береді.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1. *Сейдімбек, Н.К., Касенов, С.Е., Тлеулесова, А.М., Шияпов, К.М., Ануар, Ә.И. Мектеп математика курсында тригонометриялық теңдеулерді шешу әдістерін қолдану. Жаратылыстану ғылымдарының хабаршысы, 2023, №1(74). ҒТАМР 14.25.09. https://doi.org/10.26577/JES.2023.v74.i1.012*
2. *Қаңлыбаев, Қ., Әбдімәжитов, Ш. Тригонометриялық функциялар және олардың теңдеулері мен теңсіздіктері. – Алматы: Оқу құралы.*
3. *Садыкова, Е.Р., Разумова, О.В. Нестандартные методы решения тригонометрических неравенств. – Казань: Казанский федеральный университет, 2013. – 32 с.*
4. *Панфилова, А.В. Решение тригонометрических уравнений и неравенств: методическое пособие для учащихся и абитуриентов. – Москва: Учебно-методический центр, 48с*