bilimger.kz
Республикалық білім және ғылым порталы
https://bilimger.kz
ҚР Мәдениет және Ақпарат министрлігі тіркелген — Куәлік нөмірі: ***KZ45VPY00102718***
2022

БӨЛІМ: SHAKARIM UNIVERSITY / МАТЕМАТИКА / СТУДЕНТ

Жаңартылған білім беру жағдайында иррационал теңдеулер мен теңсіздіктерді оқытудың ғылыми негіздері

ЖАРИЯЛАНДЫ	СІЛТЕМЕ
20.05.2022	https://bilimger.kz/121476/

Муратбеков Бақытжан Маратұлы

«Семей қаласының Шәкәрім атындағы университеті» КеАҚ жаратылыстану-математика факультетінің 5В010900-математика мамандығының 2 курс магистранты

Ғылыми жетекшісі: Жолымбаев Оралтай Муратханович

Кіріспе: Жалпы теңдеулер ұғымымен төменгі сыныптан таныс. Бүтін коэффицентті алгебралық, бөлшек рационал, қарапайым тригонометриялық және иррационал теңдеулер мен теңдеулер жүйесін шешу көп қиындық тудырмайды. Ал теңдеулер түбірлерінің рационал немесе иррационал болатындығын, олардың коэффиценттеріне байланысты теңдеудің түбірлерінің бар жоғын анықтау, теңдеу шешімін табу үшін оның анықталу облысын ескере отырып, түрлендіру оқушылар үшін біршама қиындықтар тудыратындығы белгілі. Көбейткішті түбір ішінен шығаруды, көбейткішті түбір ішіне алуды, бөлшектің бөлімін иррационалдықтан босатуды 8-сыныптан білесіңдер.

Белгісіз шама радикал таңбасының астында болатын теңдеу – **иррационал теңдеу** деп аталған. Иррационал теңдеудің белгісіз шамаларының мүмкін мәндер аймағы жұп дәрежелі радикал астындағы теріс емес барлық өрнектердің мәндер аймағынан құралады.

Рационал теңдедің түріндегі теңдеу екені белгілі, мұндағы және – көпмүшелер: – n дәрежелі, ал — m дәрежелі көпмүше, сонымен қатар n m.

Осы айтылған жайттан иррационал теңдеудің ерекшелігі бұл теңдеудің белгісіз шамаларының радикал таңбасы астында болуында.

Анықтама. Егер теңдеуінің сол жақ бөлігі айнымалыдан алгебралық иррационал функция болса, онда оны ***иррационал теңдеу*** деп атайды.

1) және ;   2) ; 3) теңдеулерін бір айнымалысы бар қарапайым иррационал теңдеулер

деп атайды.

Иррационал теңдеулерді шешу барысында:

1. Теңдеудегі жұп дәрежелі түбірлердің бәрі арифметикалық түбір болады. Басқаша айтқанда, егер түбір астындағы өрнектің теріс таңбасы болса, түбірдің мағынасы болмайды, егер түбір астындағы өрнек нөлге тең болса, онда түбір де нөлге тең, егер түбір астындағы өрнектің таңбасы оң болса, онда түбірдің де мәні оң болады.
2. Теңдеудегі тақ дәрежелі барлық түбірлері түбір астындағы өрнектің кез келген нақты мәндерінде анықталған, мұнда түбір астындағы өрнектің таңбасы қандай болса, түбірдің де таңбасы сондай болады.
3. функциялары өздерінің анықталу аймағында өспелі.

Қарапайым иррационал теңдеулерді шешудің алгоритмдерін қарастырайық.

1)

2) функциясы аргументтің барлық мәндерінде анықталған және монотонды. Сондықтан .

1-мысал (1)

Шешуі: ММО табайық. Ол үшін төмендегі теңсіздіктер жүйесін шешу керек.

. Сонда ММО: .

Енді (1) теңдеудің екі бөлігін де өрнегіне көбейтеміз. Сонда ММО-да (1)-ге мәндес (2) теңдеуі шығады. Бұдан теңдеуін аламыз. Екі жағын квадраттап, ықшамдай отырып, аламыз. жиынында болғандықтан, теңдеудің екі бөлігін квадраттаймыз, , бұдан . , болғандықтан, түбірге алынбайды, яғни .

Жауабы:

Щ

2-мысал. теңдеуінің түбірі мына аралықтардың 1) 2) , 3) , 4) қайсысына тиісті екенін анықтаңдар.

Шешуі. .

Бір ғана түбірі .

Жауабы: .

3-мысал. (1)

Шешуі: функциясы аралығында өседі және өзінің ең кіші мәнін x=2 нүктесінде қабылдайды. . Демек, . Бұдан параметрінің бақылау мәні 3 болатынын көреміз. болғанда теңдеудің бір шешімі бар, ал

Болғанда теңдеудің шешімі болмайды. Яғни интервалында монотонды функциясының графигін түзуі бір ғана нүктеде қияды немесе қимайды.

Сонымен болсын. (1) теңдеуін (2) түрінде жазып, екі бөлігін квадраттаймыз. Сонда (3)

интервалында (1), (2), (3) теңдеулері мәндес. деп белгілейік, демек y≥0. Сонда (3) теңдеуі түріне келеді. Дискриминант , болғандықтан түбірін аламыз. y≥0 екенін ескерсек, түбірі ғана жарамды. Осыдан (4) теңдеуін аламыз. Теңдеудің екі бөлігі де оң сан болғандықтан квадраттай отырып, түбірін табамыз. Табылған түбір (1) теңдеуге де шешім болады.

Жауабы: болғанда

болғанда шешімі жоқ

Құрамында әр түрлі дәрежелі түбірі бар иррационал теңдеулерді шешу

Құрамында әр түрлі дәрежелі түбірі бар иррационал теңдеулер жиі кездеседі. Осыған ұқсас теңдеулерді айнымалыны алмастыру әдісімен не жүйелерді құру әдісімен шешеді. Жаңа айнымалы енгізу және жүйеге өту қандай да бір мәндес түрлендіруге жатпайды.

4-мысал. теңдеуінің түбірлерін табайық.

Шешуі. Берілген теңдеудің екі жақ бөлігін квадраттаймыз.

$1 – \ = x^2 – 2x + 1$

-x = x(x – 2)

Шыққан теңдеуді x – ке қысқартуға болмай ды, өйткені мұндай жағдайда теңдеудің бір шешімі жоғалады. Олай болса, соңғы теңдеуді мына түрге келтіреміз:

-x

-x(+ (x – 2)) = 0,

-x = 0 немесе + x – 2 = 0,

x = 0 немесе = -x + 2.

Соңғы теңдеудің екі жақ бөлігін екінші дәрежеге шығарамыз:

$x^2 – 1 = x^2 – 4x + 4$, осыдан x = .

Тексеру жүргізсек, x = 0 мәні берілген теңдеуді қанағаттандырмайтынына, ал x = мәні берілген теңдеуді дұрыс теңдікке айналдыратынына көз жеткіземіз. Демек, берілген теңдеудің түбірі .

Жауабы: .

5-мысал. теңдеуінің түбірлерін табайық.

Шешуі. Берілген теңдеуді шешу үшін оның сол жақ бөлігіндегі дәрежені түбір түрінде жазсақ, теңдеуі шығады. Соңғы теңдеуді мына түрге келтіреміз: . Шыққан теңдеудің екі жақ бөлігін үшінші дәрежеге шығарамыз:

немесе

айнымалысын енгізіп, $y^2 + y – 12 = 0$ теңдеуін аламыз. Соңғы теңдеудің түбірлері: $y_1 = 3$, $y_2 = -4$. Сонымен берілген теңдеу немесе теңдеулеріне мәндес болады. Теңдеулердің екі жақ бөлігін үшінші дәрежеге шығарып, $x – 3 = 27$ немесе $x – 3 = — 64$ теңдеулерін аламыз.

Демек, $x = 30$ немесе $x = — 61$. Тексеру арқылы x айнымалысының екі мәні де берілген теңдеудің түбірі болатынын аламыз.

Жауабы: 30; — 61.

6-мысал: (1)

Шешуі: ММО табамыз. . Демек, . Енді формуласын пайдаланып, теңдеудің екі бөлігін кубтаймыз. Сонда (1)-ге ММО-да мәндес теңдеу аламыз.

. Тік жақша ішіндегі өрнекті (1) теңдеудегі санымен алмастырамыз. Сонда теңдеуін аламыз. Бұдан . Теңдеудің екі бөлігін кубтаймыз. Сонда (1) теңдеуге мәндес , бұдан түбірін аламыз.

Жауабы:

–

Иррационал теңдеулер жүйесі

Иррационал теңдеулер жүйесін шығарған кезде рационал теңдеулерді және рационал теңдеулер жүйесін шешу тәсілдері қолданылады. Құрамында иррационал теңдеулері бар теңдеулер жүйесін шешуде алгебралық теңдеулер жүйесін шешу әдістері қолданылады. Бірақ та теңдеудің бөліктеріндегі өрнектерді түрлендіруде иррационал функцияларға қойылатын шенеуді ендіруді есте сақтағанымыз жөн.

Анықтама: Құрамында иррационал теңдеуі бар жүйені **иррационал теңдеулер жүйесі** деп атайды.

7-мысал: теңддеулер жүйесін шешейік.

Шешуі: белгілеулерін енгіземіз. Сонда берілген теңдеулер жүйесі мынадай жүйеге көшеді:

немесе

Соңғы теңдеулер жүйесіне алмастыру тәсілін қолданып a 2, b=3 және a=3, b=2 мәндерін аламыз.

Енді және , бұдан ,

және , бұдан $x_2 = 27$, $y_2 = 8$.

Тексеру: 1) x = 8 және y = 27 болса, онда

2) x = 27 және y = 8 болса, онда

x және y айнымалыларының табылған мәндерінің бәрі берілген теңдулер жүйесін қанағанттандырады.

Жауабы: (8;27) және (27;8)

8***-мысал.*** жүйесінің шешімі болсын. көбейтіндісін табыңдар.

Шешуі. Шенеулікті ескеріп, жүйені түрлендіреміз.

Сонымен, берілген жүйенің бір ғана шешімі болады. Координаттарының көбейтіндісі ке тең.

Жауабы: .

9-мысал. жүйенің шешімі болсын. қосындысын табыңдар.

Шешуі. Алмастыру әдісін пайдаланамыз.

Бұдан,

енді, шыққан түбірлерін қосамыз

Жауабы: .

10-мысал. жүйесін шешіңдер.

Шешуі. Есептің шартынан, айнымалының теріс емес мәндері ғана жүйені қанағаттандырады.

Жүйенің екінші теңдеуін шешеміз.

Осылайша келесі жүйені алдық.

Жауабы: .

11-мысал. жүйесін шешіңдер.

Шешуі. Екі санның кубтарының қосындысының формуласын пайдаланамыз.

Сонымен,

Жауабы: .

Қорытынды:

Қорыта келгенде, иррационал теңдеулер мен теңдеулер жүйесін бірнеше тәсілмен шешуге болады. Біз жоғарыда иррационал теңдеу шешудің кейбір әдістерін қарастырдық. Алайда, иррационал теңдеу шешудің тұрақты ережесі жоқ екенін ескерсек, кез келген есепті шығару үшін оқушының бойында жоғары теориялық даярлық мен ізденімпаздық, байқағыштық мен тапқырлық болуы қажет. Иррационал теңдеулер мен иррационал теңдеулер жүйесін шешудің жолдарын талдауда мектеп математикасының негізгі теориялық материалы қамтылды. Тақытыпты дұрыс қамту үшін теңдеулер классификацияланып, олардың әрқайсысы бойынша оны шешудің әдіс-тәсілдері талданып, меңгерілу деңгейі тексерілетіндігі белгілі. Мұқият іріктеліп, мүмкіндігінше толық баянбалған теориялық материал, есеп қойылымын және оны шешеудің тәсілдерін үйретуді қамтамасыз етумен қатар, қатаң логикалық талдауларды меңгеруде де септігі тиер деген ойдамын.

Пайдаланылған әдебиеттер:

1. Ваховский Е.Б. т.б. Задачи по элементарной математике. 1969 жыл
2. Галицкий М.А. т.б. Углубленное изучение курса алгебры и математического анализа. 1990 жыл
3. Әбісқасымова А. т.б. Алгебра және анализ бастамалары. 2015 жыл
4. М.А.Асқарова Теңдеулер мен теңсіздіктер және олардың жүйелерін шешу 2012 жыл